

## Führe eine Partialbruchzerlegung durch

$$a) \frac{6x^2 - 5x - 5}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Mögliche Nullstellen des Nenners: 1, -1, 2, -2

Durch Ausprobieren erhält man 1 als Nullstelle des Nenners.

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2)$$

Durch weiteres Ausprobieren erhält man auch -1 als Nullstelle.

$$(x - 1)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

Aufstellen der Partialbrüche:

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 2}$$

Man bringt alles auf einen Bruchstrich

$$\begin{aligned} & \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 2} \\ &= \frac{A(x + 1)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 1)}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \\ &= \frac{(A + B + C)x^2 + (-A - 3B)x + (-2A + 2B - C)}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 6 \\ -A - 3B &= -5 \\ -2A + 2B - C &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + B + C &= 6 \\ -A - 3B &= -5 \\ -A + 3B &= 1 \end{aligned}$$

$$A + B + C = 6$$

$$-A - 3B = -5$$

$$-2A = -4$$

$$\Leftrightarrow A = 2 \quad B = 1 \quad C = 3$$

Man erhält also:

$$\frac{6x^2 - 5x - 5}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} + \frac{3}{x - 2}$$

b)  $\frac{6x^2 - 4x - 7}{x^3 - 3x - 2}$

Mögliche Nullstellen des Nenners sind: 1, -1, 2, -2

Durch Ausprobieren erhält man -1 als Nullstelle:

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2)$$

-1 ist noch einmal Nullstelle:

$$(x + 1)(x^2 - x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$$

Aufstellen der Partialbrüche:

$$\frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x - 2}$$

Man bringt alles auf einen Bruchstrich

$$\frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x - 2}$$

$$= \frac{A(x + 1)(x - 2) + B(x - 2) + C(x + 1)^2}{x^3 - 3x - 2}$$

$$= \frac{(A + C)x^2 + (-A + B + 2C)x + (-2A - 2B + C)}{x^3 - 3x - 2}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein Gleichungssystem:

$$\begin{array}{r} A + \quad \quad + C = 6 \\ -A + B + 2C = -4 \\ -2A - 2B + C = -7 \\ \hline A + \quad \quad + C = 6 \\ \quad B + 3C = 2 \\ \quad -2B + 3C = 5 \\ \hline A + \quad \quad + C = 6 \\ \quad B + 3C = 2 \\ \quad \quad 9C = 9 \quad \Rightarrow C = 1 \\ \hline \Rightarrow B = -1 \\ \Rightarrow A = 5 \end{array}$$

Man erhält also:

$$\frac{6x^2 - 4x - 7}{x^3 - 3x - 2} = \frac{5}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-2}$$

c)  $\frac{30}{x^3-x}$

Man kann im Nenner x ausklammern:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$$

Aufstellen der Partialbrüche:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Man bringt alles auf einen Bruchstrich

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x^2 - 1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)}{x^3 - x}$$

$$\frac{(A + B + C)x^2 + (-B + C)x - A}{x^3 - x}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein Gleichungssystem:

$$A + B + C = 0$$

$$-B + C = 0$$

$$-A = 30$$

-----

$$A = -30$$

$$B + C = 30$$

$$-B + C = 0$$

-----

$$A = -30$$

$$B + C = 30$$

$$2C = 30$$

$$\Rightarrow A = -30 \quad C = 15 \quad B = 15$$

$$\frac{30}{x^3 - x} = \frac{-30}{x} + \frac{15}{x+1} + \frac{15}{x-1}$$