Basistext Zahlenmengen

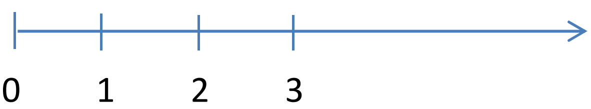
In diesem Dokument werden die verschiedenen Zahlenmengen dargestellt. Beginnend mit den einfachsten Zahlen wird die Notwendigkeit zur Erweiterung der jeweiligen Menge aufgezeigt.

In der Grundschule lernt man zunächst die einfachste Zahlenmenge kennen, die „Natürlichen Zahlen“:

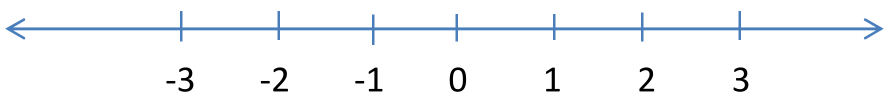
$$N = \{0,1,2,3, \dots, \infty\}$$

Diese Menge reicht für die Addition und die Multiplikation aus. Für die Subtraktion und Division gilt dieses nur eingeschränkt.

Will man 3–4 berechnen, so ist dieses im Bereich der Natürlichen Zahlen nicht möglich. Der alte Zahlenstrahl



Muss nun auf der linken Seite erweitert werden. Es kommen die negativen Zahlen dazu:



Man erhält die Menge der „Ganzen Zahlen“:

$$Z = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

Die Natürlichen Zahlen sind Teilmenge der Ganzen Zahlen:

$N \subset Z$

Will man 3:4 berechnen, so ist dieses weder im Bereich der Natürlichen Zahlen, noch im Bereich der Ganzen Zahlen möglich. Die Zahlenmenge muss um die Brüche erweitert werden. Man erhält die „Rationalen Zahlen“:

$Q = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z \; und \; b \neq 0\right\}$

Jede Ganze Zahl a lässt sich als Bruch darstellen, indem man a durch 1 teilt: $\frac{a}{1}$. Jedoch ist nicht jeder Bruch als Ganze Zahl darstellbar.

Daraus folgt: Die Ganzen Zahlen sind Teilmenge der Rationalen Zahlen.

$N \subset Z \subset Q$

Man kann den Flächeninhalt eines Quadrates berechnen, indem man die Kantenlänge quadriert. Ist der Flächeninhalt vorgegeben erhält man die Kantenlänge durch Ziehen der Quadratwurzel. Nicht jede Quadratwurzel lässt sich als Bruch darstellen (z.B. $\sqrt{2}$). Ebenso ist die Zahl π nicht als Bruch darstellbar. Um diese Bereiche abzudecken benötigt man die „Reellen Zahlen“ (R). Jede Rationale Zahl ist auch eine Reelle Zahl. Umgekehrt gilt das nicht. Somit kann die Teilmengenbeziehung erweitert werden:

$N \subset Z \subset Q \subset R$

Mit den reellen Zahlen ist der Schulstoff bis zum Abitur abgedeckt. Es gibt jedoch noch ein Problem, das noch nicht gelöst ist:

Welche Zahl zum Quadrat ergibt -1?

Hier kommen wir in den Bereich der „Komplexen Zahlen“ (C). Die Frage oben wird per Definition beantwortet: $i^2 = -1$

Die neu geschaffene Zahl i kann nun beliebig multipliziert werden. Jede Komplexe Zahl hat zusätzlich noch einen reellen Teil. Somit ergibt sich folgende Definition:

$C = \{a + bi \mid a, b \in R\}$ Beispiel: z = 4 + 3i $z \in C$

Man kann jede Reelle Zahl als Komplexe Zahl darstellen, wenn man b=0 setzt. Wenn b jedoch ungleich 0 ist lässt sich die Komplexe Zahl nicht als Reelle Zahl schreiben.

Damit gilt:

$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

Auffällig ist, dass in keinem Fall eine komplett neue Zahlenmenge geschaffen worden ist. Es wurde lediglich jedes Mal die bestehende Menge erweitert.