

# Skript Prozentrechnung

Erstellt: 2015/16

Von: [www.Mathe-in-Smarties.de](http://www.Mathe-in-Smarties.de)

## Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	2
1. Einführung .....	3
2. Berechnung des Prozentwertes .....	5
3. Berechnung des Prozentsatzes.....	6
4. Berechnung des Grundwertes.....	7
5. Zinsen .....	9
6. Gemischt.....	13
7. Lösungsteil.....	16

# Vorwort

Das nachfolgende Skript ist eine Einführung in die Prozentrechnung. Es wurde in ehrenamtlicher Arbeit erstellt und soll nicht kommerziell genutzt werden. Es steht Jedermann zur freien Verfügung und es darf nach Belieben genutzt, kopiert und verbreitet werden. Es wird erwartet, dass dieses ebenfalls kostenfrei geschieht.

Zu allen Bereichen gibt es zunächst eine theoretische Einführung mit Beispielen. Anschließend steht noch Übungsmaterial zur Verfügung. Die entsprechenden Lösungen findet man abgetrennt im hinteren Teil des Skriptes. Alle Beispiele und Aufgaben können und sollten ohne Taschenrechner berechnet werden.

Die weiterführenden Kapitel Rente und Tilgung werden im schulischen Bereich wenn überhaupt nur am Rande behandelt. Sie sind deshalb nicht Gegenstand dieses Skriptes.

Das gesamte Material wurde nach besten Wissen und Gewissen erstellt. Für trotzdem vorhandene Fehler kann naturgemäß nicht gehaftet werden.

## 1. Einführung

Die Prozentrechnung ist ein Bereich der Mathematik, in dem immer wieder auftretende „Anteilsberechnungen“ zusammengefasst werden.

Der Begriff ‚Prozent‘ wurde aus den Bausteinen ‚pro‘ (für oder von) und Cent (Hundert) zusammengesetzt. Er bedeutet also „von Hundert“. Die gleiche Bedeutung hat das Prozentzeichen ‚%‘.

‚3 %‘ bedeutet also 3 von 100 Anteilen.

‚100 %‘ bedeutet also 100 von 100 Anteilen und damit alles.

**Merke:** **100% ist das Ganze.**

Man kann ‚3 %‘ auch als Bruch oder als Dezimalzahl ausdrücken:

$$3\% = \frac{3}{100} = 0,03$$

In der einfachen Prozentrechnung stehen drei Begriffe im Mittelpunkt:

1. **Prozentsatz (p%)** – Hiermit wird festgelegt wie viele von Hundert ausgewählt werden. Er legt also einen Anteil fest. Man erkennt den Prozentsatz sehr leicht am mitgeführten Prozentzeichen.
2. **Grundwert (G)** – Mit dem Grundwert drückt man aus, wovon der Anteil genommen wird. In Textaufgaben ist der Grundwert am Wort ‚von‘ zu erkennen.
3. **Prozentwert (W)** – Der Prozentwert ist sozusagen das Ergebnis. Nimmt man einen Anteil von einer Grundmenge erhält man einen Wert, nämlich den Prozentwert.

Diese drei Größen bilden eine wichtige Gleichung:

$$p\% \cdot G = W$$

Diese Gleichung sollte man unbedingt auswendig können. Sie wird im Nachfolgenden immer wieder verwendet.

### **Aufgabe 1**

Was ist der Prozentsatz, der Prozentwert und der Grundwert in den nachfolgenden Aussagen?

- a) Wenn man 3% aus einer Herde von 200 Schafen aussortiert, so hat man 6 Schafe entfernt.
- b) Beim Kauf einer Hose zu 50 Euro erhält man 10% Rabat. Dabei spart man 5 Euro.
- c) 200 Euro Zinsen erhält man nach einem Jahr, wenn man ein Guthaben über 10.000 Euro bei einer Bank mit 2% jährlich verzinst.

## 2. Berechnung des Prozentwertes

Um den Prozentwert zu errechnen benutzt man die bereits in der Einleitung erwähnte Formel:

$$p\% \cdot G = W$$

Der Prozentwert steht alleine auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens. Man muss also nur den Prozentsatz (p%) mit dem Grundwert multiplizieren um ihn zu erhalten.

### Beispiel:

Wie viel ist 4% von 500?

$$G = 500 \quad p\% = 4\% \quad \Rightarrow \quad W = \frac{4}{100} \cdot 500 = 20$$

### **Aufgabe 2**

Berechne den Prozentwert

- a)  $G = 200$                        $p\% = 6\%$
- b)  $G = 1.000.000$                  $p\% = 10\%$
- c)  $G = 50$                           $p\% = 4\%$
- d)  $G = 7.000$                        $p\% = 2\%$

### **Aufgabe 3**

Ein Kunde möchte ein Auto kaufen. Der Preis von 15.000 Euro ist ihm aber zu hoch. Er handelt mit dem Verkäufer einen Rabatt von 5% aus. Wie viel muss der Kunde nun zahlen?

### 3. Berechnung des Prozentsatzes

Um den Prozentsatz zu berechnen benutzen wir erneut die Gleichung aus der Einleitung:

$$p\% \cdot G = W$$

Da man  $p\%$  berechnen will, muss man es auf der linken Seite der Gleichung isolieren. Dazu teilt man beide Seiten der Gleichung durch  $G$  und erhält:

$$p\% = \frac{W}{G}$$

Man muss also den Prozentwert durch den Grundwert teilen.

Beispiel:

Wie viel Prozent sind 15 € von 300 €?

$$G = 300 \text{ €} \quad W = 15 \text{ €} \quad \Rightarrow \quad p\% = \frac{W}{G} = \frac{15}{300} = 0,05 = 5\%$$

#### Aufgabe 4

Berechne den Prozentsatz:

- |               |           |
|---------------|-----------|
| a) $G = 1000$ | $W = 100$ |
| b) $G = 400$  | $W = 50$  |
| c) $G = 50$   | $W = 25$  |
| d) $G = 100$  | $W = 46$  |

#### Aufgabe 5

Ein Auto kostet 20.000 €. Der Verkäufer kommt einem Kunden entgegen und verkauft das Auto für 19.000 €. Auf wieviel Prozent hat der Verkäufer verzichtet?

## 4. Berechnung des Grundwertes

Auch die Berechnung des Grundwertes erfolgt mit Hilfe der Gleichung aus der Einleitung:

$$p\% \cdot G = W$$

Um den Grundwert G auf der linken Seite des Gleichheitszeichens zu isolieren, teilt man auf beiden Seiten durch p%. Man erhält:

$$G = \frac{W}{p\%}$$

Man erhält also den Grundwert indem man den Prozentwert durch den Prozentsatz teilt.

### Beispiel:

Ein Käufer zahlt für ein Auto 13.500 €. Er hat 10% Rabatt erhalten. Wie hoch war der ursprüngliche Preis für das Auto?

Hier muss man aufpassen! Der Prozentsatz ist nicht 10%, denn dieses ist der Wert der erlassen wurde. Der Prozentsatz ist  $100\% - 10\% = 90\%$ .

$$W = 13.500 \text{ €} \quad p\% = 90\% \quad \Rightarrow \quad G = \frac{W}{p\%} = \frac{13.500 \text{ €}}{0,9} = 15.000 \text{ €}$$

### **Aufgabe 6**

Berechne den Grundwert:

- a)  $W = 70$                        $p\% = 10\%$
- b)  $W = 25 \text{ €}$                      $p\% = 50\%$
- c)  $W = 150 \text{ Autos}$                  $p\% = 75\%$
- d)  $W = 10 \text{ Ziegen}$                 $p\% = 25\%$



### **Aufgabe 7**

Bei einer Wahl erhält ein Kandidat 900 Stimmen. Im Vergleich zur letzten Wahl hat er 10% der Stimmen verloren. Wie viele Stimmen hat er bei der letzten Wahl erhalten?

### **Aufgabe 8**

Peter besitzt ein Aktienpaket. Dieses Paket ist heute 12.000 € wert. Im letzten Jahr hat Peter ein Gewinn von 20% gemacht. Wieviel waren die Aktien vor einem Jahr wert?

## 5. Zinsen

Im Bereich der Zinsen werden neue Begriffe benutzt, die aber den bereits gezeigten Variablen entsprechen:

Der **Zinssatz  $p\%$**  entspricht dem Prozentsatz.

Das **Kapital  $K$**  entspricht dem Grundwert.

Der **Zins  $Z$**  entspricht dem Prozentwert.

Aus  $p\% \cdot G = W$  wird also  $p\% \cdot K = Z$

Wenn nichts anderes angegeben ist bezieht sich ein Zinssatz immer auf ein Jahr.

Beispiel:

Auf einem Sparbuch mit 1000 € erhält man 3 Prozent Zinsen. Wieviel Geld hat man nach einem Jahr?

$$p\% = 3\% \quad K = 1000\text{€} \quad \Rightarrow \quad Z = p\% \cdot K = 0,03 \cdot 1000\text{€} = 30\text{€}$$

Man hat also 1030 €.

### Aufgabe 9

Peter legt 500 € zu 2% bzw. zu 3% an. Wieviel Zinsen erhält er nach einem Jahr?

Zur Berechnung von Zinsen bezogen auf einen Zeitraum von weniger als ein Jahr muss man alles auf Tage umrechnen. Dabei geht man zur Vereinfachung davon aus, dass ein Monat 30 Tage und ein Jahr somit 360 Tage hat. Wenn  $i$  die Anzahl der Tage ist gilt dann:

$$Z = p\% \cdot K \cdot \frac{i}{360}$$

### Beispiel:

Auf einem Sparbuch mit 1000 € erhält man 3 Prozent Zinsen. Wieviel Geld hat man nach 36 Tagen?

$$p\% = 3\% \quad K = 1000\text{€} \quad i = 36$$

$$\Rightarrow Z = p\% \cdot K \cdot \frac{i}{360} = 0,03 \cdot 1000\text{€} \cdot \frac{36}{360} = 3\text{€}$$

Man hat also 1003 €.

### **Aufgabe 10**

Annika erhält bei ihrer Bank 5% Zinsen. Sie muss ihr angelegtes Geld in Höhe von 12.000 € jedoch nach einem Monat wieder abheben. Wieviel Zinsen erhält sie?

Bei Zeiträumen von mehr als einem Jahr hat man das Problem, dass sich das Kapital von Jahr zu Jahr ändert. Nach einem Jahr hat man das ursprüngliche Kapital plus die bereits im ersten Jahr erhaltenen Zinsen. Dieses ist die Grundlage für die Berechnung der nächsten Zinsen. Der Umstand, dass Zinsen wieder verzinst werden, nennt man **Zinseszins**.

Wir gehen zunächst von der bereits bekannten Formel zur Berechnung von Zinsen aus:

$$Z = p\% \cdot K \quad (1)$$

Es sei  $K_0$  das ursprüngliche Kapital und  $K_1$  das Kapital nach einem Jahr. Dann gilt:

$$K_1 = K_0 + Z \quad (2)$$

Wir ersetzen  $Z$  von der Gleichung (1) in (2) ein:

$$K_1 = K_0 + p\% \cdot K_0 \quad (3)$$

Nun noch ausklammern:

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + p\%) \quad (4)$$

Für jedes weitere Jahr kommt ein weiterer Faktor  $(1+p\%)$  hinzu. Allgemein gilt dann für  $n$  Jahre:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p\%)^n$$

Dieses ist die allgemeine Formel für die Verzinsung über mehr als ein Jahr.

Beispiel:

1000 € sollen zu 3 Prozent über 5 Jahre angelegt werden. Wieviel Kapital hat man am Ende der 5 Jahre?

$$K_5 = K_0 \cdot (1 + p\%)^5 = 1000 \text{ €} \cdot (1 + 0,03)^5 \approx 1159,27 \text{ €}$$

**Achtung:**

Bei einer langen Laufzeit hat der Zinseszins einen enormen Effekt, der von den meisten Menschen im Allgemeinen unterschätzt wird.

### **Aufgabe 11**

Ein Mann besitzt 10.000 € Grundkapital bei verschiedenen Banken werden Verzinsungen von 2%, 3% und 4% angeboten.

- a) Wieviel Zinsen würde der Mann jeweils nach einem Jahr erhalten?
- b) Wieviel Kapital hat der Mann jeweils nach 2 Jahren?

### **Aufgabe 12**

Peter besitzt 200 €. Er möchte nach einem Jahr 6 € Zinsen erhalten. Mit welchem Prozentsatz muss das Kapital verzinst werden?

### **Aufgabe 13**

Ein in der Höhe unbekanntes Kapital wurde mit 4% ein Jahr lang verzinst. Der Ertrag war 1200 €. Wie hoch war das Kapital zu Beginn?

### **Aufgabe 14**

Michael will sein Kapital in Höhe von 10.000 € über 2 Jahre möglichst gewinnbringend anlegen. Bank A bietet ihm für das erste Jahr 3% und für das zweite Jahr 4% Zinsen an. Bei Bank B ist es umgekehrt. Welches Angebot ist günstiger?

### **Aufgabe 15**

Maria will ihr Geld kurzfristig bei einer Bank zwischenlagern. Sie erhält für ihre 1.000 € 2% Zinsen. Das Geld soll den kompletten April angelegt werden. Wieviel Zinsen erhält Maria?

## 6. Gemischt

### Aufgabe 16

Berechne im Kopf:

- |                |                  |
|----------------|------------------|
| a) 3% von 1400 | d) 5% von 20     |
| b) 2% von 50   | e) 1% von 7000   |
| c) 8% von 200  | f) 0,1% von 1000 |

### Aufgabe 17

- a) Wie viel Prozent sind 8 von 200?
- b) Wie viel Prozent sind 2 von 1000?
- c) Wie viel Prozent sind 14 von 140?
- d) Wie viel Prozent sind 3 von 150?
- e) Wie viel Prozent sind 10 von 5?
- f) Wie viel Prozent sind 5 von 10?

### Aufgabe 18

Wie hoch ist der Grundwert?

- a) 8 ist 5% vom Grundwert
- b) 2 ist 50% vom Grundwert
- c) 6 ist 150% vom Grundwert
- d) 10 ist 10% vom Grundwert
- e) 40 ist 200% vom Grundwert
- f) 0,7 ist 7% vom Grundwert

### Aufgabe 19

Bei einer Wahl hat ein Kandidat 15% der Stimmen erhalten. Es wurden insgesamt 200 Stimmen abgegeben. Wie viele Stimmen wurden für den Kandidaten abgegeben?

### **Aufgabe 20**

Von 25 Schülern in einer Klasse kommen 12 mit dem Fahrrad zur Schule.  
Wieviel Prozent sind das?

### **Aufgabe 21**

Peter muss 900 € Miete zahlen. Das sind 30% seines Einkommens. Wieviel verdient Peter?

### **Aufgabe 22**

Eine Kücheneinrichtung soll 5000 € kosten. Der Kunde erhält jedoch 5% Rabatt.  
Wieviel muss er bezahlen?

### **Aufgabe 23**

Ein Kunde muss statt 2000 € nur 1600 € zahlen. Wieviel Prozent beträgt der Nachlass?

### **Aufgabe 24**

Annika zahlt für ein Gemälde 450 €. Der Händler hat ihr das Bild 25% günstiger überlassen. Wie hoch war der ursprüngliche Preis?

### **Aufgabe 25**

Für ein Darlehen in Höhe von 10.000 € zahlt Leon 5,5% Zinsen. Wie viel muss er nach einem Jahr an Zinsen bezahlen?

### **Aufgabe 26**

Bei seinem Festgeldkonto erhält Leon jedes Jahr 130 € Zinsen. Dieses entspricht 2%. Wie groß ist das eingesetzte Kapital?

### **Aufgabe 27**

Maria hat 45 Tage lang 12.000 € auf ihrem Geldmarktkonto gehabt. Der Jahreszins beträgt 2%. Wieviel Zinsen erhält Maria?

### **Aufgabe 28**

Elke hat 10.000 € über 5 Jahre zu 3% Zinsen angelegt. Die Zinsen werden nicht jährlich ausgezahlt sondern wiederangelegt. Wieviel Geld erhält Elke nach den 5 Jahren ausgezahlt?



## 7. Lösungsteil

### Aufgabe 1

a) p% = 3%	G = 200 Schafe	W = 6 Schafe
b) p% = 10%	G = 50 Euro	W = 5 Euro
c) p% = 2%	G = 10.000 Euro	W = 200 Euro

### Aufgabe 2

a) G = 200	p% = 6%	$W = \frac{6}{100} \cdot 200 = 12$
b) G = 1.000.000	p% = 10%	$W = \frac{10}{100} \cdot 1.000.000 = 100.000$
c) G = 50	p% = 4%	$W = \frac{4}{100} \cdot 50 = 2$
d) G = 7.000	p% = 2%	$W = \frac{2}{100} \cdot 7000 = 140$

### Aufgabe 3

Wir berechnen zunächst den Rabatt

$$W = \frac{5}{100} \cdot 15000 \text{ €} = 750 \text{ €}$$

Der Rabatt muss nun vom ursprünglichen Preis abgezogen werden:

$$15000 \text{ €} - 750 \text{ €} = 14250 \text{ €}$$

Alternativ kann man auch 95% vom Grundwert berechnen:

$$W = \frac{95}{100} \cdot 15000 \text{ €} = 14250 \text{ €}$$

#### Aufgabe 4

a) $G = 1000$	$W = 100$	$p\% = \frac{W}{G} = \frac{100}{1000} = 0,1 = 10\%$
b) $G = 400$	$W = 50$	$p\% = \frac{W}{G} = \frac{50}{400} = 0,125 = 12,5\%$
c) $G = 50$	$W = 25$	$p\% = \frac{W}{G} = \frac{25}{50} = 0,5 = 50\%$
d) $G = 100$	$W = 46$	$p\% = \frac{W}{G} = \frac{46}{100} = 0,46 = 46\%$

#### Aufgabe 5

Der Verkäufer verzichtet auf 1000 €. Es gilt also:

$$W = 1000 \text{ €} \quad G = 20.000 \text{ €} \quad p\% = \frac{W}{G} = \frac{1.000}{20.000} = 0,05 = 5\%$$

#### Aufgabe 6

a) $W = 70$	$p\% = 10\%$	$G = \frac{W}{p\%} = \frac{70}{0,1} = 700$
b) $W = 25 \text{ €}$	$p\% = 50\%$	$G = \frac{W}{p\%} = \frac{25 \text{ €}}{0,5} = 50 \text{ €}$
c) $W = 150 \text{ Autos}$	$p\% = 75\%$	$G = \frac{W}{p\%} = \frac{150 \text{ Autos}}{0,75} = 200 \text{ Autos}$
d) $W = 10 \text{ Ziegen}$	$p\% = 25\%$	$G = \frac{W}{p\%} = \frac{10 \text{ Ziegen}}{0,25} = 40 \text{ Ziegen}$

#### Aufgabe 7

Vorsicht Falle!

Wenn er 10% an Stimmen verliert, erhält er also  $100\% - 10\% = 90\%$

$$W = 900 \quad p\% = 90\% \quad G = \frac{W}{p\%} = \frac{900}{0,9} = 1000$$

### Aufgabe 8

Der heutige Wert entspricht dem alten Wert plus 20%. Es gilt also:

$$p\% = 120\% \quad W = 12.000 \quad G = \frac{W}{p\%} = \frac{12.000}{1,2} = 10.000$$

### Aufgabe 9

$$Z = p\% \cdot K$$

$$Z = 2\% \cdot 500 \text{ €} = 10 \text{ €}$$

$$Z = 3\% \cdot 500 \text{ €} = 15 \text{ €}$$

### Aufgabe 10

$$Z = p\% \cdot K \cdot \frac{i}{360} = 0,05 \cdot 12.000 \text{ €} \cdot \frac{30}{360} = 50 \text{ €}$$

### Aufgabe 11

a)  $Z = p\% \cdot K$

$$Z = 2\% \cdot 10.000 \text{ €} = 200 \text{ €}$$

$$Z = 3\% \cdot 10.000 \text{ €} = 300 \text{ €}$$

$$Z = 4\% \cdot 10.000 \text{ €} = 400 \text{ €}$$

b)  $K_n = K_0 \cdot (1 + p\%)^n$

$$K_2 = 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 2\%)^2 = 10.000 \text{ €} \cdot 1,0404 = 10.404 \text{ €}$$

$$K_2 = 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 3\%)^2 = 10.000 \text{ €} \cdot 1,0609 = 10.609 \text{ €}$$

$$K_2 = 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 4\%)^2 = 10.000 \text{ €} \cdot 1,0816 = 10.816 \text{ €}$$

### Aufgabe 12

$$Z = p\% \cdot K \quad \Rightarrow \quad p\% = \frac{Z}{K} = \frac{6 \text{ €}}{200 \text{ €}} = 0,03 = 3\%$$

### Aufgabe 13

$$Z = p\% \cdot K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{Z}{p\%} = \frac{1200 \text{ €}}{0,04} = 30.000 \text{ €}$$

### Aufgabe 14

$$\text{Bank A:} \quad K_1 = K_0 + Z = 10.000 \text{ €} + 300 \text{ €} = 10.300 \text{ €}$$

$$K_2 = K_1 + Z = 10.300 \text{ €} + 0,04 * 10.300 \text{ €} = 10.712 \text{ €}$$

$$\text{Bank B:} \quad K_1 = K_0 + Z = 10.000 \text{ €} + 400 \text{ €} = 10.400 \text{ €}$$

$$K_2 = K_1 + Z = 10.400 \text{ €} + 0,03 * 10.400 \text{ €} = 10.712 \text{ €}$$

Beide Angebote sind gleichwertig.

### Aufgabe 15

$$Z = p\% \cdot K \cdot \frac{i}{360} = 0,02 \cdot 1.000 \text{ €} \cdot \frac{30}{360} = \frac{20 \text{ €}}{12} = 1,67 \text{ €}$$

### Aufgabe 16

- |       |       |
|-------|-------|
| a) 42 | d) 1  |
| b) 1  | e) 70 |
| c) 16 | f) 1  |

### Aufgabe 17

- a) 4%
- b) 0,2%
- c) 10%
- d) 2%
- e) 200%
- f) 50%

### Aufgabe 18

- a) 160
- b) 4
- c) 4
- d) 100
- e) 20
- f) 10

### Aufgabe 19

30

### Aufgabe 20

48%

### Aufgabe 21

3000 €

### Aufgabe 22

$5000 \text{ €} - 250 \text{ €} = 4750 \text{ €}$

### Aufgabe 23

20%

### Aufgabe 24

600 €

Aufgabe 25

550 €

Aufgabe 26

6500 €

Aufgabe 27

30 €

Aufgabe 28

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p\%)^n = 10.000 \text{ €} \cdot 1,03^5 \approx 11.592,74 \text{ €}$$