

Größte gemeinsame Teiler (ggT)

Die Teiler einer Zahl a sind alle Zahlen durch die man a ohne Rest teilen kann.

Beispiel: Die Teiler der Zahl 12 sind 1, 2, 3, 4, 6 und 12.

Die gemeinsamen Teiler zweier Zahlen a und b sind also alle Zahlen, die sowohl a , als auch b ohne Rest teilen. Interessant für weitere Betrachtungen in der Mathematik ist es nun, den größten dieser gemeinsamen Teiler zu finden. Für kleine Zahlen kann man diesen durch „geschicktes Betrachten“ ermitteln. Ist dieses zu schwierig kann man folgendes Verfahren anwenden:

Beispiel:

Gesucht ist das ggT der Zahlen 36 und 90.

Zunächst wird eine Primfaktorzerlegung bei beiden Zahlen durchgeführt:

$$36 = 2 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$90 = 2 \cdot 45 = 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Die Zahlen werden also in Primzahlen aufgesplittet.

Nun vergleicht man die Primzahlen und stellt die Übereinstimmungen fest:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Das Ausmultiplizieren der Übereinstimmenden Faktoren ergibt nun des ggT:

$$\text{ggT} (36; 90) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$$

Zur Bestimmung des ggT gibt es ein weiteres Verfahren:

Beispiel: Gesucht ist das ggT von 42 und 15

Dazu wird die größere Zahl nach vorne geschrieben und die kleinere nach hinten:

$$42 \quad 15$$

Im nächsten Schritt rückt die kleinere Zahl an die erste Position und die zweite Zahl ist der Rest den man erhält, wenn man die erste Zahl durch die zweite teilt: $42 : 15 = 2$ Rest 12

$$15 \quad 12$$

Diese Schritte führt man solange durch, bis die 0 an zweiter Position erscheint. Der komplette Ablauf lautet also:

$$42 \quad 15$$

$$15 \quad 12$$

$$12 \quad 3$$

$$3 \quad 0$$

Die erste Zahl ist die Lösung:

$$\text{ggT}(42;15) = 3$$

Kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

Die Berechnung des kgV zweier Zahlen erfolgt ähnlich, wie beim ggT.

Beispiel:

Gesucht ist das kgV der Zahlen 18 und 70.

Es werden, wie beim ggT, Primfaktorzerlegungen durchgeführt:

$$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$70 = 2 \cdot 35 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

Interessant sind hier die Faktoren, die nicht übereinstimmen. Sie werden mit der jeweils anderen Ausgangszahl multipliziert:

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

Also:

$$3 \cdot 3 \cdot 70 = 630$$

bzw.

$$5 \cdot 7 \cdot 18 = 630$$

Man nimmt einfach den „bequemeren“ Fall.

$$\text{kgV}(18 ; 70) = 630$$