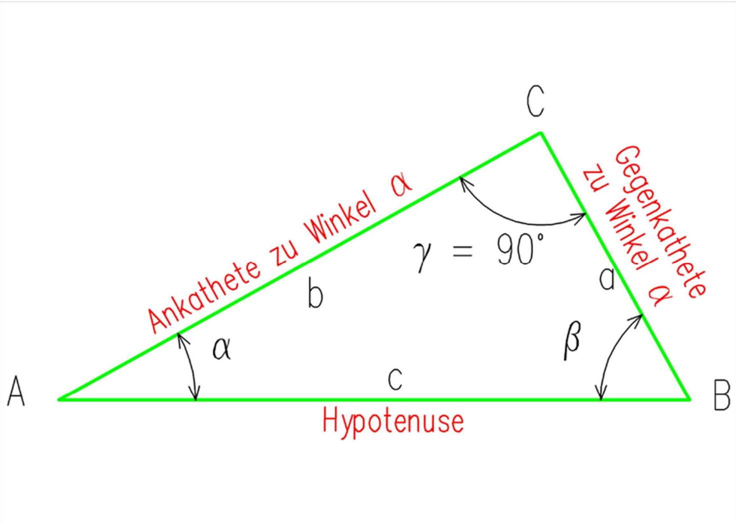
Basistext – Trigonometrie

Die Trigonometrie befasst sich mit der Seiten- und Winkelberechnung im rechtwinkligen Dreieck. Die Berechnungen erfolgen mit Hilfe der Kreisfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens (siehe Basistext Funktionen). In vielen Darstellungen erfolgt eine Veranschaulichung am Einheitskreis. In diesem Text wird darauf verzichtet, da dieses für das Lösen von Aufgaben in der Schule im Regelfall nicht notwendig ist.

Folgende Grafik dient der Orientierung für alles Nachfolgende:



Autor : Petflo2000

Wie man sieht erhalten die Punkte die Bezeichnungen A, B und C, wobei C der Punkt beim rechten Winkel (90 Grad) ist. Die zugehörigen Winkel erhalten nach dem griechischen Alphabet die Bezeichnung α, β und γ (Alpha, Beta und Gamma). Die Seiten werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Dabei entspricht der Buchstabe der Bezeichnung des gegenüberliegenden Punktes.

Die Hypotenuse ist die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt. Betrachtet wird nun der Winkel α. Die Gegenkathete liegt diesem Winkel gegenüber. Merke: Die Gegenkathete liegt „GEGEN"-über. Die Ankathete verbindet den Punkt A und den rechten Winkel. Merke: Die Ankathete liegt „AN" dem Winkel. Vorsicht: für den Winkel β wechseln Ankathete und Gegenkathete die Rollen!

Für die Berechnung der fehlenden Größen stehen drei Grundgleichungen zur Verfügung:

$$\sin(\propto) = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$$

$$\cos(\propto) = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$$

$$\tan(\propto) = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankethete}$$

Zur weiteren Berechnung werden oft die Umkehrfunktionen der Kreisfunktionen benötigt. Dieses sind die Arkus-Funktionen, also Arkussinus (kurz: arcsin), Arkuscosinus (arccos) und Arkustangens (arctan). Beim Taschenrechner wird oft die Bezeichnungen $\sin^{-1}$ usw. verwendet.

Will man nun eine Größe in einem Dreieck berechnen, sucht man eine passende Formel, sodass zwei von den drei enthaltenden Größen bekannt sind. Man isoliert die unbekannte Größe und kann sie berechnen.

Beispiel:

Gegeben: $\propto = 60^o$, a = 5cm

Gesucht: b

Die passende Formel ist: $\tan(\propto) = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankethete}$

Wir lösen nach b auf:

$$b = \frac{a}{\tan(60°)} = \frac{5cm}{1{,}73} \approx 2{,}89cm$$

Sind zwei von den drei Winkeln bekannt erhält man den dritten Winkel nach der Formel: fehlender Winkel = 180^o - bekannte Winkel.

(Merke die Summe der Winkel in einem Dreieck ist 180^o.)

Anschließend noch nützliche Umrechnungsmöglichkeiten:

Beziehungen:

$$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

$$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$1 + tan^2(\alpha) = \frac{1}{cos^2(\alpha)}$$

Additionstheoreme:

$$sin(\alpha + \beta) = sin(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sin(\beta)$$

$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)sin(\beta)$$

$$tan(\alpha + \beta) = \frac{tan(\alpha) + tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Doppelter Winkel

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - tan^2(\alpha)}$$