Basistext – Komplexe Zahlen

Definition

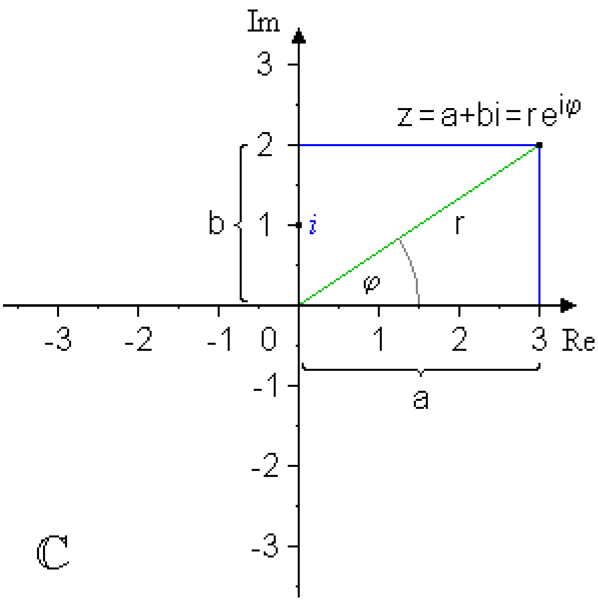
In der Mathematik gab es das Problem, dass man im Bereich der Reellen Zahlen die Gleichung $x^2 = -1$ nicht lösen kann. Der Mathematiker Leonard Euler führte deshalb die imaginäre Zahl ‚i' ein, mit der Definition: $i^2 = -1$.

Damit lassen sich analoge Probleme wie z.B. $\sqrt{-4}$ lösen. Die Ergebnisse wären in diesem Beispiel 2i oder -2i.

Eine Komplexe Zahl kann neben einem Vielfachen von i aber auch noch einen reellen Anteil besitzen. Die Darstellung einer Komplexen Zahl ist üblicherweise: $z = a + bi$, wobei a und b aus R sind.

Die Menge der Komplexen Zahlen wird mit ‚C' abgekürzt. Es gilt ferner: $R \subset C$. Dieses ist leicht ersichtlich. Man kann jede Zahl $r \in R$ als Komplexe Zahl darstellen, indem man a = r und b = 0 setzt. Denn es gilt: r = r + 0i. Umgekehrt ist aber nicht jede Komplexe Zahl auch eine Reelle Zahl. Das gilt z.B. für ‚i' (a=0 und b=1).

Der Mathematiker Gauß führte zur Darstellung ein Koordinatensystem ein:



Hierbei befinden sich alle Reellen Zahlen auf der x-Achse.

Polarform / Exponentialform

Komplexe Zahlen lassen sich auch in Polarform darstellen (siehe Abbildung):

$z = r * (\cos(\gamma) + \sin(\gamma) * i)$ mit $r \geq 0$ und $0 \leq \gamma \leq 360°$.

Dabei gilt:

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\tan(\gamma) = \frac{b}{a}$

Wobei γ die Bedingung erfüllen muss: $\cos(\gamma) = \frac{a}{r}$ und $\sin(\gamma) = \frac{b}{r}$

Die Exponentialform hat folgendes Aussehen:

$z = r * e^{i\gamma}$ mit $e^{i\gamma} = \cos(\gamma) + i \sin(\gamma)$

Durch Einsetzen erhält man wieder die Polarform von oben.

Grundrechenarten

<u>Addition:</u>

Es werden die reellen und die imaginären Anteile getrennt voneinander addiert:

(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i

<u>Subtraktion:</u>

Die Subtraktion erfolgt analog zur Addition. Man muss jedoch beachten, dass aufgrund der Klammerregel beim zweiten Term beide Summanden ein negatives Vorzeichen bekommen:

(a + bi) – (c + di) = a + bi – c – di = (a - c) + (b – d)i

Multiplikation:

Es handelt sich hier um das Ausmultiplizieren zweier Klammern. Es kommt zur Anwendung, dass i x i = -1 ist.

(a + bi) x (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac – bd) + (ad+bc)i

Division:

Hier wird der Bruch “passend” erweitert.

$$(a + bi) : (c + di) = \frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Konjugiert Komplexe Zahl

Bei gegebener Komplexen Zahl $z = a + bi$ ist $\bar{z} = a - bi$ die konjugiert komplexe Zahl. In der Gauß-Ebene erhält man sie, indem man z an der x-Achse spiegelt.

Weiterhin gilt für die Grundrechenarten:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$$(a + bi) - (a - bi) = 2bi$$

$$(a + bi) * (a - bi) = a^2 + b^2$$

$$(a + bi) : (a - bi) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}i$$

Betrag

Der Betrag für $z = a + bi$ ist definiert als: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Das Entspricht in der Gauß-Ebene dem Abstand von z zum Nullpunkt. Die Berechnung erfolgt nach dem Satz des Pythagoras für die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

Es gilt: $|z| = |\bar{z}|$