Basistext – Lineare Gleichungssysteme

Eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten hat die allgemeine Form

$$a * x = b$$

Mit zwei Unbekannten gibt es die allgemeine Form:

$$a * x + b * y = c$$

Gelten mehrere dieser Gleichungen liegt ein lineares Gleichungssystem vor. Allgemein hat es die Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Äquivalenzumformungen für lineare Gleichungssysteme

Folgende Umformungen sind in einem linearen Gleichungssystem möglich, ohne dass die Lösungsmenge sich ändert:

1) Vertauschen von Gleichungen
2) Multiplikation einer Gleichung mit einer Konstante ungleich 0
   Beispiel:
   $2x_1 + 3x_2 = 4 \quad | *2$
   $\Leftrightarrow \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$
3) Addition einer Gleichung zu einer anderen

Einsetzungsverfahren

Beim Einsetzungsverfahren löst man eine Gleichung nach einer Variablen auf und ersetzt dann diese Variable in den anderen Gleichungen.

Beispiel:

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$\wedge \quad 2x_1 - x_2 = 8$$

Die erste Gleichung wird nach x_1 aufgelöst:

$$x_1 = -2x_2 + 4$$

Dieser Ausdruck ersetzt nun x_1 in der zweiten Gleichung:

$$2(-2x_2 + 4) - x_2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad -4x_2 + 8 - x_2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad -5x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 = 0$$

Wird nun dieses Ergebnis in die erste Gleichung eingesetzt erhält man:

$$x_1 + 2*0 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = 4 \qquad L = \{(4; 0)\}$$

Gleichsetzungsverfahren

Beim Gleichsetzungsverfahren werden zwei Gleichungen „verglichen“, die auf einer Seite des Gleichungszeichens identische Terme besitzen. Die jeweils anderen Seiten werden gleich gesetzt.

Beispiel:

$$2x_1 = 4x_2 - 5$$

$$\wedge \quad 2x_1 = 3x_2 - 3$$

Die jeweils linken Seiten der Gleichungen sind identisch. Damit werden die rechten Seiten gleich gesetzt:

$$4x_2 - 5 = 3x_2 - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 = 2$$

Das Ergebnis wird in die erste Gleichung eingesetzt:

$$2x_1 = 4*2 - 5$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = 3/2 \qquad L = \left\{\left(\frac{3}{2}; 2\right)\right\}$$

Additionsverfahren

Beim Additionsverfahren werden zwei Gleichungen addiert. Das geschieht indem man die linke Seite der zweiten Gleichung zur linken Seite der ersten Gleichung addiert. Die jeweiligen rechten Seiten werden ebenfalls addiert. Es ist dabei gewollt, dass mindestens eine Variable aus der Gleichung verschwindet.

Beispiel:

$$2x_1 + x_2 = 5$$

$$\wedge \quad -2x_1 + 3x_2 = 7$$

Die Gleichungen werden addiert:

$2x_1 + x_2 - 2x_1 + 3x_2 = 5 + 7$

$\Leftrightarrow \quad 4x_2 = 12$

$\Leftrightarrow \quad x_2 = 3$

Das Ergebnis wird in die erste Gleichung eingesetzt:

$2x_1 + 3 = 5$

$\Leftrightarrow \quad 2x_1 = 2$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = 1 \qquad\qquad L = \{(1,3)\}$

Beim Additionsverfahren ist es wichtig, dass die Gleichungen vorher geeignet umgeformt werden, also mit den richtigen Faktoren multipliziert werden, damit die Variable verschwindet.

Beispiel:

$2x_1 + 3x_2 = 7$

$\wedge \quad 4x_1 + 5x_2 = 9$

Hier sollte die erste Gleichung mit -2 multipliziert werden:

$-4x_1 - 6x_2 = -14$

Wird diese Gleichung nun zur zweiten addiert entfällt x_1.

Das Additionsverfahren ist eine Vorstufe des sogenannten „Gauß-Verfahren“, welches bei großen Systemen Verwendung findet. Dieses Verfahren soll hier nicht behandelt werden.

Lösungsmengen

Es gibt für lineare Gleichungssysteme drei grundsätzliche Lösungsmengen:

1) Keine Lösung
   Kommt es bei der äquivalenten Umformung zu Widersprüchen, so hat das System keine Lösung. Zum Beispiel könnte man das Ergebnis
   3 = 4 erhalten.
   Ebenso könnte man folgendes erhalten:

   $$2x_1 = 5$$

   $$\wedge \quad 5x_1 = 5$$

   In beiden Fällen ist das System nicht lösbar. Unlösbare Systeme treten oft auf, wenn man mehr Gleichungen als Variablen hat.

2) Genau eine Lösung
   Lassen sich die Variablen eines Systems mit Hilfe der oben beschriebenen Verfahren ohne Widerspruch bestimmen, so besitzt das System genau eine Lösung. Hierzu müssen mindestens so viele Gleichungen wie Variablen vorhanden sein.
3) Unendlich viele Lösungen
   Erhält man nach dem Umformen einen Ausdruck, so dass die Variablen voneinander abhängig sind, so hat das System beliebig viele Lösungen.
   Beispiel: $x_1 = 2x_2$
   Hier wird eine Lösungsvariable durch eine andere Variable (beispielsweise „a“) ersetzt und die andere Lösungsvariable wird in Abhängigkeit geschrieben. Die Lösungsmenge hier wäre also $L\{(a; 2a))\}$